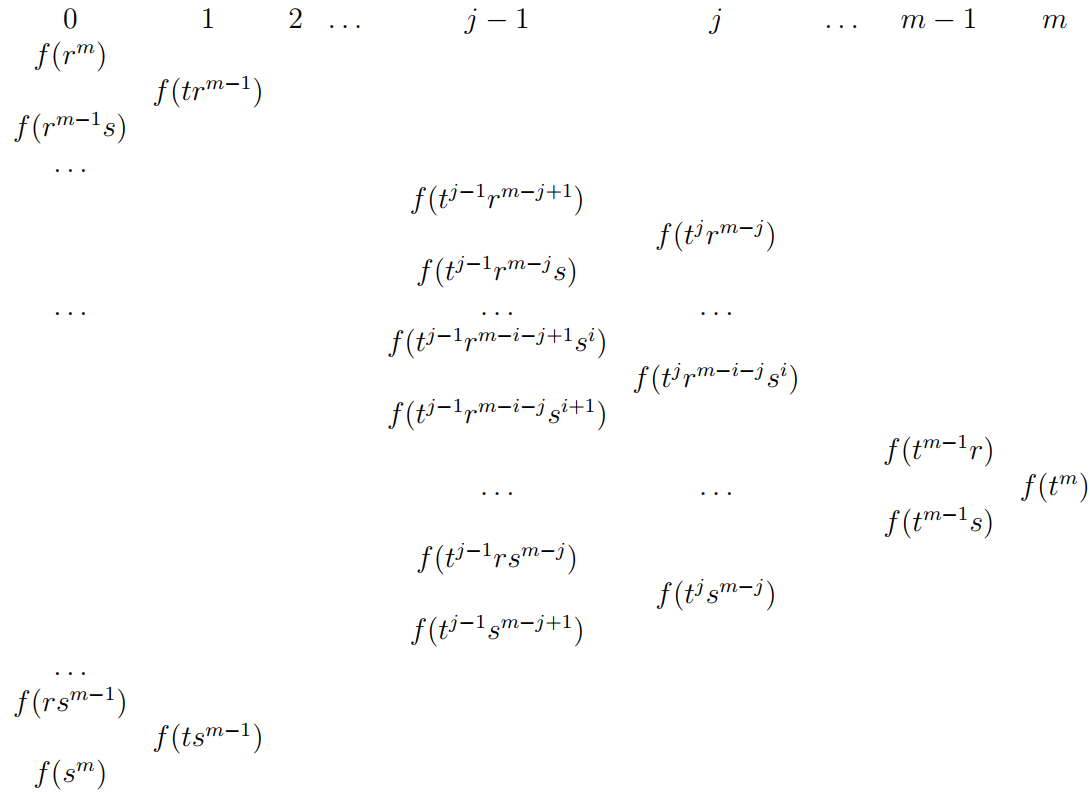
**5.1 de Casteljau算法** 2020年9月23日10点31分

开始内容回顾了第三章和第四章的内容,这里略过.

计算曲线上的点的一般情况,由控制点的顺序确定,其中,如下所示.我们将

缩写为,其中.点是从第阶段第步获得的,,根据插值步骤



为了使上述三角形阵列更具可读性,让我们定义在计算过程中使用的以下点:

然后,我们有以下等式:

仿射不变性.这意味着,如果将仿射映射应用于控制点序列所指定的B´ezier曲线,获得曲线,则由控制点序列确定的B´ezier曲线是原始控制点的图像,它与曲线相同.这可以表示为

这是因为通过计算仿射组合获得了由控制点序列指定的B´ezier曲线上的点,并且仿射映射保留了仿射组合.

该属性可用于节省大量计算时间.如果要使用仿射图移动曲线,而不是将仿射图应用于原始曲线上计算的所有点,则只需将仿射图应用于控制点,然后构造新的B´ezier曲线.通常,这比移动每个点便宜得多.

仿射参数更改下的不变性. 在区间内,由控制点序列确定的B´ezier曲线与上的B´ezier曲线相同,具有相同的控制点序列.这可以表示为

这个事实基本上是显而易见的,留给读者,读者还可以验证以下两个属性:

且

凸包属性. 由控制点序列确定并在区间上定义的B´ezier曲线的分段包含在控制点的凸包中.这是因为,当时,计算曲线段上的点涉及的所有仿射组合都是凸重心组合.

该属性可用于确定两个贝塞尔曲线线段是否彼此相交.

**端点插值**. 在区间上,由控制点序列指定的贝塞尔曲线仅通过点和.

**对称**. 在区间内,控制点序列所指定的B´ezier曲线等于控制点序列在区间指定的B´ezier曲线.这可以表示为

使用伯恩斯坦多项式的对称性很容易看出这一点.另一种观察方法是观察曲线的极形式为

其中是由控制点序列确定的原始曲线的极坐标形式,满足条件

并且由于该曲线是唯一的,因此确实为.

线性精度. 如果点是共线的(属于同一条线),那么由控制点序列确定的B´ezier曲线就是同一条线.这很明显,因为曲线上的点是通过仿射组合获得的.

伪本地控制.给定由一系列控制点序列指定的B´ezier曲线F,如果将某个控制点稍微移动一点,则该曲线对参数值接近的点的影响最大.这是因为可以证明伯恩斯坦多项式在时达到最大值.

切线的确定.将在5.4节中显示,当和不同时,在点与B´ezier曲线的切线就是由和确定的直线.同样,点的切线是由和确定的线(前提是这些点是不同的).此外,由参数确定的当前点的切线由两个点确定

由de Casteljau算法给出.

变异递减特性.给定一个在上由一系列控制点序列指定的B´ezier曲线F,对于每个超平面H，B´ezier曲线段与超平面H之间的交点数,小于或等于由确定的控制多边形与超平面H之间的相交数.结果,凸控制多边形对应于凸曲线.我们将证明由于另一个属性(细分属性)而导致的变差属性减小.

**5.2 多项式曲线的细分算法** 2020年9月23日12点17分

本节内容包含两部分：

介绍贝塞尔曲线的细分算法，原理部分说的不是很明确，但是提供了mathmatics代码

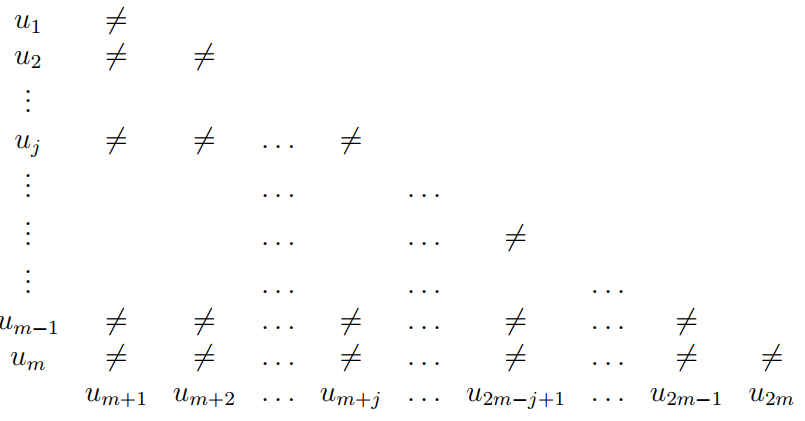
介绍m次贝塞尔曲线升阶成m+1次贝塞尔曲线的方法,但是作者不推荐这样做.

**5.4 de Casteljau算法(de Boor算法)的渐进版本** 2020年9月24日10点05分

现在，我们考虑de Casteljau算法的另一种推广,这在处理样条曲线时将很有用.这样的版本将被称为渐进版本,其原因很快就会清楚.在处理样条曲线时,为了方便,控制点不仅要考虑形式,还应考虑形式,其中是取自长度为的序列的实数,满足某些不等式条件.让我们从m = 3的情况开始.

接下来的内容以m=3为例介绍了形式。

**定义5.3.1** 一个实数序列是渐进的当且仅当对所有成立,.这个条件对应于下列数组的下三角形部分

**

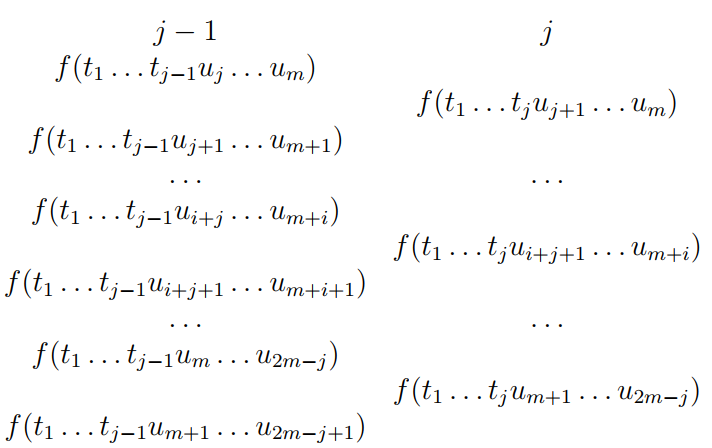
请注意,渐进不等式数组的第个对角降序以(在垂直轴上)开始,以(在水平轴上)结束.项将在之前或之后,具体取决于不等式.我们将

缩写为,并且当时,我们将

缩写为.

通过插值,在阶段的步骤,.获得点

在渐进情况下,极值的一般计算的阶段显示如下:



请注意,可以执行插值步骤的原因是我们存在不等式

从主下降对角线开始,它对应于渐进不等式数组的第个下降对角线.

为了使上述三角形阵列更具可读性,让我们定义在计算过程中使用的以下点:

以及

则,我们具有下列等式

中间一段内容介绍在m=2情况下如何使用渐进de Casteljau算法计算的封闭形式.

**定理5.3.2** 令是一个渐进序列,在某个仿射空间给定任意个点的序列,则存在一个唯一的次数为的多项式曲线,其极形式满足条件

其中.

**5.4 多项式曲线的导数** 2020年9月24日11点26分

在本节中,紧随Ramshaw之后,将中的一个点表示为，以便将其与向量区别开来将很方便.单位向量表示为.在处理导数时,将向量表示为也更为方便.

给定多项式曲线,对于任何,回顾导数是极限

如果该极限存在.

回想一下,由于,其中是一个仿射空间,所以处F的导数是中的一个向量,而不是中的一个点.

取导数时,形式为的系数出现很多,因此跟随Knuth,引入衰减率[falling power]符号是有用的.我们定义衰减率为

**引理5.4.1** 给定一个极度为m的仿射多项式函数,对于任意且,可以从的极形式计算出第个导数如下,其中:

本节剩余内容是举例说明极形式的求导.

**5.5 连接仿射多项式函数** 2020年9月24日11点50分

在处理样条曲线时,我们需要将多个曲线段与某些必需的连续性条件连接起来,以确保平滑度.典型的情况是,我们有两个区间和,其中,并且有两个仿射曲线段和,我们希望在处连接.

最弱的条件根本没有条件,称为连续性.这意味着我们甚至不在乎,也就是说,处可能存在不连续性.在这种情况下,我们说是一个不连续结.下一个最弱的条件称为连续性,即.换句话说,我们在处施加连续性,但对导数没有条件.通常,我们有以下定义.

**定义5.5.1** 极度为的两个曲线段和称为在处具有连续性,,当且仅当

为了方便,定义和.

**引理5.5.2** 给定两个区间和,其中且,两个极数为仿射曲线段和,且曲线段和在处具有连续性,其中,如果它们的极形式和同意包含至多个不同于的点的所有多点集,即

其中.

剩下的内容是对**引理5.5.2**的详细解释,比较重要.

**本章的习题比较重要，是连接其它插值算法的重要纽带.从第5题开始，都需要做**.